YACHANA
REVISTA CIENTÍFICA
Noviembre 2016
EDICIÓN ESPECIAL

Conceptos y teoremas en acción en la resolución de problemas de Trabajo Lineal que involucran cálculo

Diana Gallegos Zurita[1], Christian Pavón Brito[2]

Fecha de recepción:
16 de julio, 2016

Fecha de aprobación:
28 de noviembre, 2016

Resumen

El propósito de este estudio fue determinar los conceptos-en-acción y teoremas-en-acción que tienen los estudiantes cuando resuelven problemas de Trabajo Lineal con el uso de cálculo diferencial e integral, utilizando la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud. En este estudio participaron seis estudiantes registrados en la materia de Física Clásica con Cálculo en el tópico de Trabajo y Energía. Esta materia tiene como pre-requisito y co-requisito las materias de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral respectivamente. Los estudiantes resolvieron un problema de Trabajo Lineal que involucró la utilización del cálculo diferencial e integral y de acuerdo con el esquema de solución del problema se establecieron los conceptos y teoremas en-acción equivocados. Para esto se utilizó el análisis conversacional. Los hallazgos estuvieron marcados principalmente en la interpretación geométrica de la integral definida dada una función.

Palabras clave: Campos Conceptuales de Vergnaud, Enseñanza de la Física, Conceptos-en-acción, Teoremas-en-acción.

Abstract

The purpose of this study was to determine the concepts-in-action and theorems-in-action that students have when they solve problems of Linear Work with the use of differential and integral calculus using the Conceptual Fields Theory of Vergnaud. This study involved six students registered in the subject of Classical Physics with Calculus on the topic of Work and Energy. This course has as prerequisite and corequisite the subjects of Differential Calculus and Integral Calculus respectively. Students solved a problem of Linear Work which involved the use of differential and integral calculus and according to the way in which developed the problem settled wrong concepts and theorems in-action. For this, a conversational analysis was used. Findings were marked mainly in the geometric interpretation of the definite integral given a function.

Keywords: Conceptual Fields of Vergnaud, Physics Teaching, Concepts-in-action, Theorems-in-action.

[1]Universidad de Guayaquil. Facultad de Ingeniería Industrial. E-mail: diana.gallegosz@ug.edu.ec

[2]Magíster en Enseñanza de la Física; Universidad de Guayaquil; Facultad de Filosofía Letras y Ciencias de la Educación; E-mail: christian.pavonb@ug.edu.ec

Introducción

Este trabajo se desarrolló, debido a que existen serias dificultades en los esquemas de resolución de problemas de trabajo lineal con el uso de cálculo diferencial e integral. La matemática es una herramienta fundamental para el entendimiento de la Física. Por lo que, la transferencia inadecuada del conocimiento de Cálculo al estudio, a la Física y la no utilización de técnicas de enseñanza adecuadas, han provocado que los estudiantes no puedan interpretar las ecuaciones de fisca que involucra cálculo. Debido a esto, los estudiantes de las carreras de Ingeniería de una universidad ecuatoriana de la ciudad de Guayaquil registrados en un curso de Física en el campo conceptual de la Mecánica con cálculo, en el tópico de trabajo lineal (dominio de la física), tienen dificultades cuando resuelven problemas de trabajo lineal que involucren el uso de cálculo diferencial e integral (dominio de las matemáticas) (Coello y Flores, 2013).

La teoría de Vergnaud es un buen referencial para analizar las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas en ciencias y, por consiguiente, de la conceptualización de las mismas. Tales dificultades podrían por ejemplo, ser examinadas en términos de invariantes operatorios, quiere decir, en términos de cuáles son los conceptos y teoremas-en-acción que los estudiantes estarían usando para la resolución de problemas y de cuán distantes estarían de los conceptos y teoremas científicos pertinentes a la resolución del problema dado. (Moreira, 2002).

El abordaje de una situación, los datos a ser trabajados y la secuencia de cálculos a ser realizados dependen de los conceptos en acción y teoremas-en-acción y de la identificación de diferentes tipos de elementos pertinentes. La mayoría de esos conceptos y teoremas-en-acción permanecen totalmente implícitos, pero ellos pueden, también ser explícitos o tornarse explícitos y de ahí, la tarea del profesor en el proceso de enseñanza, el cual, debe, ayudar al alumno a construir conceptos y teoremas explícitos, y científicamente aceptados a partir del conocimiento implícito y esquemas apropiados. (Moreira, 2002).

Los conceptos y teoremas-en-acción *incorrectos*, afectan de tal manera a los estudiantes que ellos no puedan construir un conocimiento científico correcto e impiden la transferencia del conocimiento a otro contexto. El reconocimiento de estas invariantes operatorias puede, progresivamente, tornarse en verdaderos conceptos y teoremas científicos.

Determinarlos o estar al tanto de los mismos sería un recurso conceptual para los profesores, que les permita enseñar mejor y finalmente, les ayude a cambiarlos (Hammer, 1996). En otras palabras, ellos deben tener los esquemas para promover el cambio conceptual. Además, es necesario determinar lo que los estudiantes comprenden y qué necesitan comprender para lograr un cambio en su comprensión (Rennie, 2011).

Por lo antes expuesto, el propósito de este estudio fue utilizar la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud para determinar las invariantes operatorias que tienen los estudiantes en la resolución de problemas de trabajo lineal cuando aplican el cálculo diferencial e integral.

Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud

A partir de legado de Piaget y Vygotsky, Gérard Vergnaud desarrolló una teoría, y partió de una premisa "el conocimiento está organizado en campos conceptuales", cuyo dominio, por parte del sujeto, se da con el pasar del tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje (Vergnaud, 1982).

En Física, por ejemplo, hay varios campos conceptuales como el de la Mecánica, el de la Electricidad que no pueden ser enseñados, de inmediato, ni como sistemas de conceptos ni como conceptos aislados. Es necesaria una perspectiva desarrollista del aprendizaje de esos campos (Moreira, 2002).

Los componentes de la teoría de los campos conceptuales son**:** el mismo campo conceptual, los conceptos de esquema, situación, invariante operatorio (teorema-en-acción o concepto-en-acción), y su propia concepción de concepto, se resumen a continuación.

Campo Conceptual

La teoría de los campos conceptuales supone que la conceptualización es la esencia del desarrollo cognitivo y Vergnaud considera al campo conceptual como una unidad de estudio para dar sentido a las dificultades observadas en la conceptualización de lo real.

Dicho de otro modo, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud es una teoría cognoscitiva que presenta un marco de referencia teórico y algunos principios fundamentales para estudiar el aprendizaje de habilidades complejas en cualquier dominio científico y además, muestra como los estudiantes actúan cuando se les presenta una determinada situación. Es decir, como ellos conceptualizan y de qué manera ponen en acción los conocimientos existentes en su estructura cognoscitiva (Vergnaud, 1990).

Conceptos y Esquema

Vergnaud define que un concepto (C) está constituido por una tripleta de tres conjuntos, las situaciones (S), las invariantes (I) y las representaciones (R).

De tal manera que C = f (S, I, R) (Vergnaud, 1990)

S: es un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;

I: es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, *o un conjunto un conjunto* de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto;

R: es un conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas.

En síntesis: Las situaciones constituyen el referente del concepto y por lo tanto le dan sentido al concepto. Los invariantes constituyen el significado del concepto y en ellos descansa la operacionalización de los esquemas. Las representaciones simbólicas constituyen el significante del concepto y son las diferentes formas lingüísticas o no lingüísticas que permiten representar el concepto y sus propiedades (Vergnaud, 1990).

Vergnaud llama esquema a la organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones. Según él, es en los esquemas que se deben investigar los conocimientos en acción del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que hacen que la acción del sujeto sea operatoria. El esquema es el hilo conductor utilizado en una situación con metas, reglas de acción, invariantes operacionales (conceptos en acción y teoremas en acción) y finalmente la posibilidad de realizar inferencias (Vergnaud, 1990).

Invariantes operatorios

Es una expresión que contiene otras expresiones "concepto-en-acción" y "teorema-en-acción" a los conocimientos contenidos en los esquemas, que a partir de ahora cuando se quiera nombrar a ambos se **utilizará** una sola expresión "invariantes operatorios".

Teorema-en-acción es una proposición sobre lo real considerada como verdadera. Concepto-en-acción es un objeto, un predicado, o una categoría de pensamiento considerada como pertinente o relevante (Vergnaud, 1990).

Metodología

Participantes

Los participantes fueron seis estudiantes registrados en un curso de Física que cursan diferentes carreras de **Ingeniería.** El pre-requisito y co-requisito para este curso son las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral respectivamente. Los estudiantes fueron cinco hombres y una mujer cuyas edades estaban comprendidas entre los 18 y 19 años.

Tareas y Materiales

La tarea instruccional seleccionada para este estudio fue la unidad de Trabajo Lineal. Este contenido fue previamente enseñado a los estudiantes y el tiempo dedicado a la instrucción fue de cuatro horas. Se aplicó una prueba y se dedicó 30 minutos por cada estudiante, para la observación y entrevista.

Procedimiento

Los estudiantes participantes recibieron un problema en el que tenían que determinar el trabajo total o neto, que realiza la componente de la fuerza aplicada en dirección del desplazamiento de un objeto sobre una superficie horizontal sin fricción; este problema representa la situación. Se les solicitó a los estudiantes que resuelvan el problema en la pizarra, utilizando los conocimientos de Cálculo y Física realizando un procedimiento detallado, y que además relaten lo que hacen conforme lo van resolviendo. La intervención de los estudiantes fue grabada en un video y más adelante fue revisada para determinar los conceptos y teoremas-en-acción incorrectos. Una vez identificados estos, se realizó una entrevista a cada uno de los estudiantes para que expliquen con mayor detalle el porqué de las "concepciones alternativas" que usaron para resolver el problema. Esta entrevista también fue grabada y se usó para determinar el porqué de los conceptos y teoremas-en-acción.

Resultados y Discusión

Luego de revisar los videos se analizaron los esquemas de resolución del problema planteado de cada uno de los estudiantes y se pudieron determinar los conceptos-en-acción incorrectos, que se detallan a continuación:

Interpretación gráfica

Seis de los cuatro estudiantes participantes no pudieron interpretar físicamente el fenómeno descrito en la gráfica del problema de manera explícita, y procedieron directamente a la resolución.

Teoremas-en-acción: Interpretar físicamente el gráfico y reconocer parámetros que se involucran, permite establecer un esquema eficaz para establecer una estrategia y así poder iniciar la resolución del problema desde el mundo de la Física (Otero, Moreira y Greca, 2002).

En este caso se presentó una gráfica de la componente de fuerza en dirección del desplazamiento versus el desplazamiento. Las diferentes formas de la gráfica están dadas en función de la variación de la fuerza F_x con el movimiento. Interpretar el gráfico en primer lugar le da una noción espacial del fenómeno y le permite abordar el problema desde el punto de vista de la Física y no solo una concepción puramente geométrica.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes indicó lo siguiente: “realmente no me interesa saber lo que significa físicamente la gráfica solo necesito obtener un resultado.”

Interpretación física de la ecuación de trabajo

De los seis estudiantes sujetos de prueba, el primero, segundo, tercero, cuarto y sexto estudiante no interpretaron físicamente la ecuación de trabajo $w = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$.

Teoremas-en-acción: El trabajo realizado por la fuerza en el desplazamiento total de x_1 a x_2, cuando se toma un elemento infinitesimal d_x y altura F_x está representado por $w = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$. En una gráfica de fuerza en función de posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por el área bajo la curva entre las posiciones inicial y final. (Young & Freedman, 2009).

En el esquema para calcular el área bajo una curva, se debe tomar un elemento de área, de espesor *dx* y altura F_x y expresar el trabajo W como el producto de la fuerza media que actúa en todo el desplazamiento F_x por el desplazamiento *dx*, en el desplazamiento de x_1 a x_2. Los estudiantes al no seccionar un diferencial de distancia no pueden representar ese segmento como el área bajo la curva y así plantear la ecuación de trabajo lineal. Ellos no tienen un esquema para definir matemáticamente la integral con los parámetros físicos dados.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes indicó lo siguiente: “no sabía cómo expresar esa ecuación puede ser porque ese tipo de ejercicios no los resuelvo de esa manera.”

Ecuación de trabajo neto lineal

De los seis participantes, cuatro no pudieron representar el trabajo como $W_{total} = \int_{x_1}^{x_2} F_{x_1} dx + \int_{x_2}^{x_3} F_{x_2} dx$, para el problema planteado.

Teorema-en-acción: El trabajo total W_{tot} realizado por todas las fuerzas sobre el cuerpo es la suma algebraica de los trabajos realizados por las fuerzas individuales. (Young & Freedman, 2009).

Un esquema correcto para plantear las ecuaciones $\int_{x_2}^{x_3} F_{x_2} dx$ y $\int_{x_2}^{x_3} F_{x_2} dx$ en cada uno de los tramos permite en lo posterior definir los límites de integración y la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento F_x. Este teorema-en-acción es una consecuencia del anterior.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes indicó lo siguiente: “plantear con la integral se me hace difícil yo siempre resuelvo calculando el área bajo la gráfica.”

Función F_x

El estudiante uno determinó la pendiente de la recta dada dos puntos P(x, F_x) del primer tramo pero no supo cómo utilizarla para escribir F_x. El estudiante dos escribió las dos expresiones constantes igual a F_x = 5N. Los estudiantes tres y cuatro no expresaron la función y la dejaron descrita como F_x. Los estudiantes cinco y seis escribieron la función en el primer tramo como $F_x = x$.

Teorema-en-acción: El vector fuerza a lo largo del desplazamiento F_x es un objeto matemático que describe la dependencia de una variable con respecto a otra. En este caso la dependencia de la fuerza en función del desplazamiento.

Determinar la función de la fuerza F_x con respecto al desplazamiento es importante ya que se podrá distinguir entre una variable y una constante, y con ello calcular el trabajo para F_x variable integrando con respecto a x y para F_x constante sacar de la integral y dejarla expresada como: $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = F_x \int_{x_1}^{x_2} dx = F_x(x_2 - x_1)$. Los estudiantes no tienen un esquema eficaz para expresar una función en términos de las variables físicas. Este teorema-en-acción es una consecuencia de los anteriores.

En la entrevista posterior a la resolución del problema el estudiante seis expresó lo siguiente: “La función es igual a x porque es una recta que pasa por el origen y que la acotaba con la integral entre cero y dos, luego evaluaba la función.”

El estudiante cinco expresó lo siguiente: “Que aunque suene ridículo y vergonzoso no consideré el valor de la pendiente de la recta y por tanto se me hizo difícil encontrar la función rápidamente”. Adicional exclamó: “Para sacar la función por medio de la integral, integral tengo tomar los valores de mi barrido por *x* que es de dos a cuarto y mi función de arriba menos al función de abajo la función de arriba es *y=5* y mi función de abajo sería *y=0* por eso a esta no la tomo en cuenta.”

Solución

Los estudiantes tres y cuatro, integraron la expresión (F_x) y luego evaluaron en los puntos dados en la función dada en la gráfica. Los estudiantes dos y cinco escribieron directamente que el trabajo realizado por una fuerza que se desplaza una distancia es igual al área bajo la curva *F* vs *x*.

Con todo lo antes descrito, si los estudiantes tienen un gráfico *F* vs *x,* calculan geométricamente el área bajo la gráfica sin el uso del cálculo. Entender físicamente el concepto de integral de una función como el área limitada por curva F_x y el eje *x* en un intervalo de *a* a *b* así como también encontrar la función F_x son unas de las dificultades que se pudo encontrar cuando los estudiantes resuelven problemas de trabajo lineal. Estos estudiantes al no tener claro estos conceptos en acción, no tienen esquemas correctos para resolver problemas.

En la entrevista posterior a la resolución del problema el estudiante cuatro expresó lo siguiente: “Aquí integro F(x), evalúo en la gráfica en los intervalos dados para encontrar el trabajo”.

El estudiante cinco expresó lo siguiente: “Para mí muy particularmente matemáticamente todo lo que es integral yo lo puedo deducir fácilmente, pero aplicar en física se me hace un poco complicado”.

En síntesis los conceptos en acción que necesitan atención y por ende sus teoremas en acción relacionados son: Interpretación gráfica, Interpretación física de la ecuación de trabajo, Ecuación de trabajo neto lineal y Función F_x. En la tabla 1 se presentan los conceptos-en-acción y teoremas-en-acción del problema planteado.

Conclusiones

El dominio conceptual de las matemáticas y su relación a una situación física es la dificultad que se encontró al momento de resolver el problema propuesto. La causa de esto es la transferencia inadecuada del

Tabla 1. **Conceptos y Teoremas-en-acción.**

Conceptos-en-acción	Teoremas-en-acción
a. Interpretación gráfica	Interpretar físicamente el gráfico y reconocer parámetros que se involucran, permite establecer un esquema eficaz para establecer una estrategia y así poder iniciar la resolución del problema desde el mundo de la Física.
b. Interpretación física de la ecuación de trabajo	El trabajo realizado por la fuerza en el desplazamiento total de x1 a x2, cuando se toma un elemento infinitesimal dx y altura Fx está representado por $w = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$. En una gráfica de fuerza en función de posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por el área bajo la curva entre las posiciones inicial y final.
c. Ecuación de trabajo neto lineal	El trabajo total Wtot realizado por todas las fuerzas sobre el cuerpo es la suma algebraica de los trabajos realizados por las fuerzas individuales.
d. Función (Fx)	El vector fuerza a lo largo del desplazamiento Fx es un objeto matemático que describe la dependencia de una variable con respecto a otra. En este caso la dependencia de la fuerza en función del desplazamiento.

conocimiento matemático a los esquemas de resolución de problemas que involucran cálculo integral en Física. Además, no poseen esquemas para el planteamiento y su respectiva resolución del problema. Los estudiantes carecen de representaciones no-lingüísticas que les de la facultad para representar los conceptos.

Las clases en cual se dictan cálculo diferencial e integral son totalmente aisladas de las situaciones físicas. Los profesores a base de estudios como estos deberían dar ejemplos en la cual el cálculo integral tenga aplicación en problemas de Física.

Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no se produce una adecuada unión entre ambas, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral (Llorens y Santoja, 1997). En efecto, las concepciones alternativas que tienen los estudiantes solo indican que ellos no han concebido esquemas para la interpretación fisca de la integral. Interpretar la integral es considerar la situación física que está involucrada en el problema no solo un resultado numérico. En fin, este trabajo es un referente para mejorar la enseñanza y hacer investigación correlacionada a este ámbito.

Referencias

Coello, S. y Flores, J. (2013). Dificultades de la aplicación de cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas de campo eléctrico. *Yachana: Revista Científica, 2*(2), 37-50.

Hammer, D. (1996). More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for educational research [Abstract]. *American Journal of Physics, 64*(10), 1316-1325. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1119/1.18376

Llorens, J. y Santoja, F. (1997). Una

Interpretacion de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto Integral. *Divulgaciones Matematicas, 5*(1-2), 61-76. Recuperado de https://www.emis.de/journals/DM/v5/art7.pdf

Moreira, M. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias,7*(1), 1-28. Recuperado de https://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf

Otero, M., Moreira, M. y Greca, M. (2002). El uso de imágenes en textos de física para la enseñanza secundaria y universitaria. *Investigaciones de Enseñanza de las Ciencias, 7*(2), 127-154. Recuperado de https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/565

Rennie, L. (2011). Blurring the boundary between the classroom and the community: Challenges for teachers' professional knowledge. En J. Corrigan (Ed.) *The professional knowledge base of science teaching* (pp. 13-29). USA: Springer.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.). *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. (pp. 39-59). Hillsdale, New Jersey, USA: Erilbaum.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Young, H. y Freedman, R. (2009). *Sears-Zemansky Fisica Universitaria* (12ª ed.). México D.F., México: Pearson Educación.

ANEXO No.1

Problema propuesto

Una piedra de 2kg se mueve a lo largo del eje x sobre una superficie horizontal sin fricción, actúa sobre ella una F_x que varía con la posición de la piedra, como se muestra en la figura. Responda las siguientes preguntas:

a. Relate el fenómeno físico que se interpreta a partir del gráfico.

b. Cuál es la interpretación física de la siguiente expresión $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$

c. Plantea la ecuación de trabajo total para el problema dado usando el cálculo.

d. Calcule el trabajo total.

Solución

Cálculo de trabajo (W_1) $x_1=0$ a $x_2=2$

$W_1=\int_0^2 F_x \, dx$ (1)

$F_x = mx$ (2)

Cálculo de la pendiente

$$m= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

$$m= \frac{5-0}{2-0} = 2,5$$

Representacion de F_x

$F_x = 2.5x$

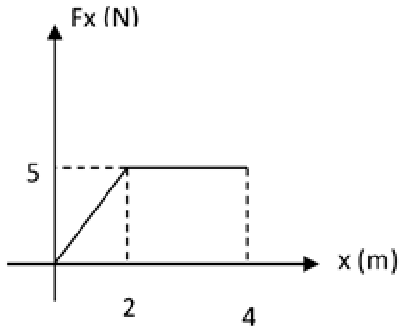
$$W_1 = \int_0^2 F_x dx = \int_0^2 2.5x \, dx = 2.5 \left| \frac{2^2}{2} - 0 \right| = 5J$$

Cálculo de trabajo (W_2) de $x_2=2$ a $x_3=4$

$W_2 = = \int^4 F_x\, dx = F_x \int^4 dx = 5 \int^4 dx = 5[4-2] = 10J$

Cálculo de Total (W_N) $x_1=0$ a $x_2=4$

$W_N = 5J + 10J = 15J$



Para citar este artículo utilice el siguiente formato:

Gallegos, D. y Pavón, C. (noviembre de 2016). Conceptos y teoremas en acción en la resolución de problemas de Trabajo Lineal que involucran cálculo. *YACHANA, Revista Científica, 5(3), Edición Especial*, 37-45.